高等代数第六章

6.1 内积、长度和正交性

- 内积
  内积的英文是 “inner product” 或 “dot product”

> **定理1**
> 设 v，u 和 w 是 R^n 中的向量, c 是一个数,那么

$a.\quad u\cdot v=v\cdot u$

$b.\quad (u+v)\cdot w=u\cdot w+v\cdot w$

$c.\quad (cu)\cdot v=c(u\cdot v)=u\cdot(cv)$

$d.\quad u\cdot u\geq 0$，并且$u\cdot u=0$成立的充分必要条件是$u=0$

- 向量的长度

$$||v||^2=v\cdot v$$

$$dist(u,v)=||u-v||$$

- 正交向量
  正交向量的英文是 “orthogonal vectors” 或 “perpendicular vectors”

> 定义如果 $u\cdot v=0$，如 R^n 中的两个向量 u 和 v 是(相互) 正交的.

> 对于一个方阵A，Col$A$中的向量与Nul$A$中的向量正交。

> **定理2 (毕达哥拉斯(勾股)定理)**

$$||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$$

- 正交补
  正交补的英文是 “orthogonal complement”

> 1.向量 x 属于 $W^\perp$ 的充分必要条件是向量 x 与生成空间 W 的任一向量都正交.
> 2. $W^\perp$ 止是 R^n 的一个子空间.

> **定理3**
> $(RowA)^\perp$ = $NulA$ 且 $(ColA)^\perp$ = $NulA^T$

6.2 正交集

- 正交集的英文是 “orthogonal set” 或 “orthonormal set”

> **定理4**
> 如果 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$ 是由 R^{n} 中非零向量构成的正交集，那么 S 是线性无关集，因此构成 S 所生成的子空间的一组基.

> **定理5**
> 假设$\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$是 R^{n} 中于空间 W 的正文基,对 W 中的每个向量y,线性组合 $y=x_1c_1+\cdots+x_ic_i$ 中的权可以由 $c_j=(y\cdot u_j)/(u_j\cdot u_j)$计算

正交投影 先欠着 懒得写

> **定理6**
> 一个 $m\times n$ 矩阵 U 具有单位正交列向量的充分必要条件是 $U^{T}U$ = I.

> **定理7**
> 假设 U 是一个具有单位正交列的 $m\times n$ 矩阵，且 x 和 y 是 R^{n} 中的向量，那么
> a. $||Ux||=||x||$.
> b. $(Ux)\cdot(Uy)=x\cdot y$
> c. $(Ux)\cdot(Uy)=0$ 的充分必要条件是 $x\cdot y=0$

> **定理9 (最佳逼近定理)**
> 假设 W 是 R^{n} 的一个子空间，y 是 R^{n} 中的任意向量， $\hat{y}$ 是 y 在 W 上的正支投影，那么 $\hat{y}$ 是 W 中最接近 y 的点，也就是
>
> $$||y-\hat{y}||<||y-v||$$
>
> 对所有属于 W 又异于 $\hat{y}$ 的 v 成立.

6.4 格拉姆-施密特方法

格拉姆 - 施密特方法

设$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$是内积空间$V$中的一组线性无关向量。
首先$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_1$；对于$k=2,3,\cdots,n$，

$$\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{v}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\langle\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{u}_j\rangle}{\langle\boldsymbol{u}_j,\boldsymbol{u}_j\rangle}\boldsymbol{u}_j$$

即从$\boldsymbol{v}_k$中减去它在已构造正交向量$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_{k-1}$上的投影，得到新正交向量$\boldsymbol{u}_k$。

6.5 最小二乘问题

- 最小二乘的英文是 “least squares” 或 “least square method”；
  最小二乘解的英文是 “least squares solution”。
- **定义**

$$||b - A\widehat{x}|| \leq ||b - Ax||$$

> **定理13**
> 方程 $Ax = b$ 的最小二乘解集和法方程 $A^T Ax = A^T b$ 的非空解集一致.

> **定理14**
> 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 下面的条件是逻辑等价的:
> a.对于 R^n 中的每个 b， 方程 $Ax = b$ 有唯一最小二乘解.
> b.A 的列是线性无关的.
> c.矩阵 $A^T A$是可逆的.
> 当这些条件成立时，最小二乘解 £ 有下面的表示:
>
> $$\widehat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

6.7 内积空间

> **定义**
> 向量空间 V 上的内积是一个函数，对每一对属于V的向量 u 和 v，存在一个实数$\langle u, v\rangle$满足下面公理，其中 u，v，w 属于V，C 为所有数.
> 1.$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
> 2.$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
> 3.$\langle \mathrm{c}u, v\rangle = \mathrm{c}\langle u, v\rangle$
> 4.$\langle u, u\rangle \geq 0$且$\langle u, u\rangle = 0$ 的充分必要条件是 $u = 0$
> 一个赋予上面内积的向量空间称为**内积空间**

- 内积空间的英文是 “inner product space” 或 “pre-Hilbert space”

> **定理16 (柯西-施瓦茨不等式)**
> 对 V 中任意向量 u 和 v，有
>
> $$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \ \ ||v||$$

> **定理17 (三角不等式)**
> 对属于V 的所有向量u,v，有
>
> $$||u - v|| \leq ||u|| + ||v||$$