高等代数第一章

1.1 线性方程组

(1) 矩阵与增广矩阵

$$2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8$$
$$x_1 - 4x_3 = -7$$

- 矩阵 (Matrix)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1.5 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- 增广矩阵 (Augmented Matrix)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1.5 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

- 线性方程组解的三种情况：

1. 无解 (不相容) (incompatibility)
2. 有唯一解 (相容) (compatibility)
3. 有无穷多解 (相容) (compatibility)

(2) 矩阵变换

- 倍加
- 对换
- 倍乘

1.2 行化简与阶梯形矩阵

> **先导元素 (Leading element)**
> **定义**
> 一个矩阵称为阶梯形(或行阶梯形),若它有以下三个性质:
> l.每一非零行都在每一零行之上.
> 2.某一行的先导元素所在的列位于前一行先导元素的右边
> 3.某一先导元素所在列下方元素都是零.
> 若一个阶梯形矩阵还满足以下性质,贝则称它为简化阶梯形(或简化行阶梯形) .
> 4.每一非零行的先导元素是 1.
> 5.每一先导元素 1 是该元素所在列的唯一非零元素

> **定理1** (简化阶梯形矩阵的唯一性)
> 每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵.

> **主元位置 (Pivot position)**
> **定义**
> 矩阵中的主元位置是A中对应于它的阶梯形中先导元素 1 的位直.主元列是A的含有主元往直的列

> **定理2** (存在与唯一性定理)
> 线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列.也就是说增广矩阵的阶梯形没有形如
> $[0 \ \cdots \ 0 \ b]$ ，$b \neq 0$

> 的行若线性方程组相容,则它的解集可能有两种情形:
> (i)当没有自由变量时,有唯一解;
> (ii)若至少有一个自由变量,则有无穷多解.

1.3 向量方程

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> 满足加法乘法的性质

- 线性组合 $y = x_1c_1 + \cdots + x_ic_i$ 中 c_i 为权
- 向量张成 (生成)

  $span\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$ 即判断 $y = x_1c_1 + \cdots + x_ic_i$ 是否有解；或 $[\,x_1\ x_2\ \cdots\ x_3\ y]$ 是否有解

1.4 矩阵方程 Ax=b

> **定义**
> 若A是$m \times n$矩阵,它的各列为 a
> 若 x 是R^n中的向量,则 A 与 x 的积(记为Ax) 就是 A 的各列以 x 中对应元素为权的线性组合

> **定理3**
> $Ax = b$ 等价于 $[\,a_1\ a_2\ \cdots\ a_3\ \ b]$

- 解的存在性

> **方程Ax = b 有解当且仅当 b 是 A 的各列的线性组合.**

> **定理4**
> 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,则下列命题是逻辑上等价的.
> 也就是说,对某个 $Ax = b$ 它们都成立或者都不成立.

a. 对R^m中每个 b ,方程 $Ax = b$ 有解.
b. R^m中的每个 b 都是 A 的列的一个线性组合.
c. A 的各列生成R^m.
d. A 在每一行都有一个主元位置.

计算
计算 Ax 的行-向量规则
若乘积 Ax 有定义,则 Ax 中的第 i 个元素是 A 的第 i 行元素与 x 的相应元素乘积之和.

定理5

若 A 是 $m \times n$ 矩阵,u 和 v 是R^n中向量, c 是标量,如:
a. $A(u+v) = Au + Av$.
b. $A(cu) = c(Au)$.

1.5 线性方程组的解集

- 齐次线性方程组

齐次方程 $Ax = 0$ 有非平凡解当且仅当方程至少有一个自由变量.

定理6
设方程 $Ax = b$ 对某个 b 是相容的, p 为一个特解,则 $Ax = b$ 的解集是所有形如 $w = p + v_h$ 的向量的集, 其中 v_h 是齐次方程 $Ax = 0$ 的任意一个解.

1.7 线性无关

定义
向量方程 $0 = x_1c_1 + \cdots + x_ic_i$ 仅有平凡解(trivial solution) 向量组 (集) 称为线性无关的 (linearly independent)
若存在不全为零的权 c_i 使 $x_1c_1 + \cdots + x_ic_i + 0$ 则向量组 (集) 称为线性相关的 (linearly dependent)

矩阵 A 的各列线性无关,当且仅当方程 $Ax = 0$ 仅有平凡

定理7 (线性相关集的特征)
两个或更多个向量的集合 $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 线性相关,当且仅当 S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合.

定理8

若一个向量组的向量个数超过每个向量的元素个数,那么这个向量组线性相关.就 是说, R^n 中任意向量组 $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 当 $p > n$ 时线性相关.

定理9

若 R^n 中向量组 $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 包含零向量,则它线性相关

1.8 线性变换介绍

- 变换(transformation)(或称函数、映射(map)) T 是一个规则
- $T : R^n \to R^m$
  R^n称为 T 的定义域 (domain)
  R^m称为 T 的余定义域 (codomain) (或取值空间)
- 线性变换

$$T(0) = 0$$

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

1.9 线性变换的矩阵

> **定理10**
> 设 $T : R^n \to R^m$ 为线性变换,则存在唯一的矩阵 A ,使得对 R^n中一切 x 满足 $T(x) = Ax$

- 满射

  > 映射 $T : R^n \to R^m$ 称为到 R^m 上的映射,若 R^m 中每个 b 是 R^n 中至少一个 x 的像.

  > “满射” 的英文是 “surjective” 或 “surjection” 或 “onto mapping” 或 “onto function”

- 单射

  > 映射 $T : R^n \to R^m$ 称为一对一映射(或1:1),若 R^m 中每个 b 是 R^m 中至多一个 x 的像.

  > “单射” 的英文是 “injective” 或 “injection” 或 “one-to-one mapping” 或 “one-to-one function”

> **定理11**
> 设 $T : R^n \to R^m$ 为线性变换,则 T 是一对一的当且仅当方程 $Ax = 0$ 仅有平凡解.

> **定理12**
> 设 $T : R^n \to R^m$ 为线性变换,设 A 为 T 的标准矩阵，则:
> a. T 把 R^n 映上到 R^m ，当且仅当 A 的列生成 R^m.
> b. T 是一对一的，当且仅当 A 的列线性无关.