高等代数第四章

第4章 向量空间

4.1 向量空间(vector space)与子空间(subspace)

> 向量空间和向量计算法则一样

- 子空间

  > 定义向量空间 V 的一个子空间是 V 的一个满足以下三个性质的子集 H:
  > a. V 中的零向量在 H 中
  > b. H 对向量加法封闭，即对 H 中任意向量 U，V， 和 $u+v$ 仍在 H 中.
  > c. H 对标量乘法封闭， 即对 H 中任意向量 u 和任意标量 C， 向量 cu 仍在 H 中.

> **定理1** 若 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 在向量空间 V 中，则$span\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$是 V 的一个子空间.

4.2 零空间、列空间和线性变换

- 矩阵的零空间(null space)

  > **定义**
  > 矩阵 A 的零空间写成 $NulA$， 是齐次方程 $Ax=0$ 的全体解的集合.

> **定理2** $m\times n$ 矩阵 A 的零空间是R^m的一个子空间.等价地, m 个方程、n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的全体解的集合是R^m的一个子空间

- 矩阵的列空间(column space)

  > **定义**
  > $m\times n$矩阵 A 的列空间(记为 $ColA$) 是由 A 的列的所有线性组合组成的集合.若 $A=[\, x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_3 \,]$，则 $ColA=span\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$.

> **定理3** $m\times n$ 矩阵 A 的列空间是 R^m 的一个子空间.

- 线性变换的核与值域

  > 线性变换 见1.8

  - 核(零空间 $NulA$)

> 线性变换 T 的核(或零空间)是 V 中所有满足 $T(u)=0$ 的向量 u 的集合

4.3 线性无关集(linearly independent set)和基(basis)

- 线性无关 见1.7

> **定理5 (生成集定理)**
> 令$S=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$是V中的向量集，$H=span\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$.
> a.若 S 中某一个向量(比如说 v_k) 是 S 中其余向量的线性组合，则 S 中去掉v_k 后形成的集合仍然可以生成 H.
> b. 若$H\neq\{0\}$，则 S 的某一子集是 H 的一个基.

- NulA 和ColA 的基

> **定理6**
> 矩阵 A 的主元列构成 $ColA$ 的一个基.

4.5 向量空间的维数(dimension)

> **定理9**
> 若向量空间 V 具有一组基(n个基向量)， 则 V 中任意包含多于 n 个向量的集合一 定线性相关.

~~这是期中考证明题，没做出来~~

> **定理10** 若向量空间 V 有一组基含有 n 个向量，则 V 的每一组基一定恰好含有 n 个向量.

- $NulA$ 的维数是方程 $Ax=0$ 中自由变量的个数，$ColA$ 的维数是 A 中主元列的个数.

4.6 秩(rank)

- $ColA^T=RowA.$

> **定理13** 若两个矩阵 A 和 B 行等价，则它们的行空间相同.若 B 是阶梯形矩阵，则 B 的非零行构成 A 的行空间的一个基同时也是 B 的行空间的一个基

~~?看不太懂~~

以下比较重要

> **定义**
> A 的秩即 A 的列空间的维数

> **定理14 (秩定理)** $m \times n$ 矩阵 A 的列空间和行空间的维数相等，这个公共的维数(即 A 的秩)还等于 A 的主元位置的个数且,满足方程
>
> $$rank\ A + dim\ \ Nul\ A = n$$

> **定理 (可逆矩阵定理(续))**
> 令 A 是一个 $n \times n$ 矩阵，则下列命题中的每一个均等价于 A 是可逆矩阵:
>
> a. A 的列构成R^n的一个基.
>
> b. $ColA =R^n$.
>
> c. $dim\ ColA = n$.
>
> d. $rankA = n$.
>
> e. $NulA = \{0\}$.
>
> f. $dim\ NulA = 0$.

4.7 基的变换

~~先矢着~~