高等代数第五章

第5章 特征值与特征向量

5.1 特征向量(eigenvector)与特征值(eigenvalue)

> 定义 A 为 $n \times n$ 矩阵，x 为非零向量， 若存在数 λ 使 $Ax = \lambda x$ 有非平凡解 x， 则称 λ 为 A的特征值,x 称为对应于 λ 的特征向量
> 也可写作$(A - \lambda I)x = 0$

> **定理1**
> 三角矩阵的主对角线的元素是其特征值.

> **定理2**
> $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 $n \times n$ 矩阵 A 相异的特征值，$v_1, \cdots, v_r$是与$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$对应的特征向量，那么向量集合$\{v_1, \cdots, v_r\}$线性无关.

- 一、逆矩阵的特征值
  若矩阵A可逆，λ是A的特征值，则A^{-1}的特征值是$\frac{1}{\lambda}$，特征向量不变。
- 二、转置矩阵的特征值
  矩阵A与其转置矩阵A^T具有相同的特征值。
- 三、伴随矩阵的特征值
  若A可逆，A的特征值为λ_i（$i = 1, 2, \cdots, n$，$\lambda_i \neq 0$），则伴随矩阵A^*的特征值为$\frac{|A|}{\lambda_i}$，特征向量不变。

5.2 特征方程(eigen equation)

> **定理(可逆矩阵定理(续))**
> 设 A 是 $n \times n$ 矩阵，则 A 是可逆的当且仅当
> a.0不是 A 的特征值.
> b.A 的行列式不等于零.

> **定理3 (行列式的性质)**
> 设 A 和 B 是 $n \times n$ 矩阵.
> a. A 可逆的元要条件是 det$A \neq 0$.
> b. det $AB =$ (det A) (det$B$).
> c. det A^T = det A.
> d. 若 A 是三角形矩阵，那么det A 是 A 主对角线元素的乘积.

> e. 对 A 作行替换不改变其行列式值.作一次行交换，行列式值符号改变一次数来一行后，行列式值等于用此数来原来的行列式值.

> **定理4**
> 若 $n \times n$ 矩阵 A 和 B 是相似的，那么它们有相同的特征多项式，从而有相同的特征值(和相同的重数).

5.3 对角化(diagonalize)

> **定理5 (对角化定理)**
> $n \times n$ 矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.
> 事实上， $A = PDP^{-1}$, D 为对角矩阵的充分必要条件是 P 的列向量是 A 的 n 个线性无关的特征向量.此时，D 的主对角线上的元素分别是 A 的对应于 P 中特征向量的特征值.

> **定理6**
> 有 n 个相异特征值的$n \times n$ 矩阵可对角化.

> **定理7**
> ~~似乎不重要，因为我也读不懂~~

> **定理8 (对角矩阵表示)**
> 设 $A = PDP^{-1}$ ， 其中 D 为 $n \times n$ 对角矩阵，若 R^n 的基β由 P 的列向量组成，那么 D 是变换 $x \to Ax$的β-矩阵.