高等代数第二章

第 2 章 矩阵代数

2.1 矩阵运算

加减乘

2.2 矩阵的逆

> 不可逆矩阵有时称为**奇异矩阵**，而可逆矩阵也称为**非奇异矩阵**.
>
> $$A^{-1}A = I$$
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{detA} \times A_{adj}$$
>
> A_{adj}是伴随矩阵（adjugate matrix）
>
> $$(A^{-1})^{-1} = A$$
>
> $$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

> 若干个$n \times n$ 可逆矩阵的积也是可逆的，其逆等于这些矩阵的逆按相反顺序的乘积 ~~看不懂，不爱用这种方法~~

求法（我常用）：

$$[\,A \quad I\,] = [\,I \quad A^{-1}\,]$$

2.3 矩阵的特征

- 挺多的

2.4 分块矩阵

- 没什么特别的

2.5 LU分解

> L 是 $m \times m$ 下三角矩阵， 主对角线元素全是1，
> $A = LU$
> AI写的：

- Doolittle分解（LU分解的一种常见形式）

- 原理 对于一个$n \times n$矩阵 A，将其分解为一个下三角矩阵L,主对角线元素为1和一个上三角矩阵U的乘积，即$A = LU$。

> 计算步骤
>
> 1. **设定矩阵形式** 设
>
> $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
>
> $$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> 2. **计算U的第一行和L的第一列**
>
> $$u_{1j} = a_{1j}(j = 1, 2, \cdots, n)$$
>
> $$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}(i = 2, 3, \cdots, n)$$
>
> 3. **对于$k = 2, 3, \cdots, n$，分别计算U的第k行和L的第k列计算U的第k行**:
>
> $$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} (j = k, k+1, \cdots, n)$$
>
> **计算L的第k列**:
>
> $$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}(a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk})(i = k+1, k+2, \cdots, n)$$

> *示例*
> 对于矩阵
>
> $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$
>
> 1. **第一步计算** 首先$u_{11} = 2$， $u_{12} = 1$，$u_{13} = 1$，$l_{21} = \frac{4}{2} = 2$，$l_{31} = \frac{8}{2} = 4$
> 2. **第二步计算** 然后计算
> $u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 2 \times 1 = 1$， $u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 3 - 2 \times 1 = 1$

3. **第三步计算**

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = \frac{1}{1}(7 - 4\times1) = 3$$

4. **第四步计算** 最后

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 9 - 4\times1 - 3\times1 = 2$$

5. **得出结果** 得到

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$