高等代数第三章

第 3 章 行列式（determinant）

3.1 行列式介绍

- 人话版本：

  > 我的方法：
  > 1、选择一行零最多的，
  > 2、他的位置是第（i，j）,那就删去第i行，第j列，剩下的就是（余因子）
  > 3、这一行每个数都这样算$a_{ij} \times |C_{ij}| \times (-1)^{i+j}$，最后求和

> **定理 2**
> 若 A 为三角阵，则 det$A$ 等于 A 的主对角线上元素的乘积

3.2 行列式的性质

> **定理3 (行变换)**
> 令 A 是一个方阵.
> a. 若 A 的某一行的倍数加到另一行得矩阵B， 则det B = det A .
> b 若 A 的两行互换得矩阵 B， 则 det B = - det A.
> c. 若 A 的某行来以 k 倍得到矩阵 B， 则det B = k det A .
> ** 补充
>
> $$|A^T| = |A|$$
>
> $$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$
>
> $$|A^*| = |A|^{n-1}$$
>
> $$|kA| = k^n|A|$$

> **定理4**
> 方阵 A 是可逆的当且仅当 det $A \neq 0$

> **定理5**
> 若 A 为一个 $n \times n$ 矩阵，则det A^T = det A.

> **定理6 (乘法的性质)**
> 若 A 和 B 均为 $n \times n$ 矩阵，则 det AB = (det A)(det B) .

- 行列式与秩的关系

> $\det(A) \neq 0$那么矩阵A是满秩的，秩$\text{rank}(A) = n$。这是因为行列式不为零意味着矩阵的列（行）向量组是线性无关的
> 也就是齐次线性方程组$Ax = 0$的充要条件是系数矩阵秩$\text{rank}(A) = n$

- $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow$ **齐次线性方程组** $Ax = 0$ **只有零解**

3.3 克拉默法则

> **定理7 (克拉默法则)**
> 设 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵，对 R^m 中任意向量 b ， 方程 $Ax = b$ 的唯一解可由下式给出:
>
> $$x_i = \frac{det\ \ A_i(b)}{det\ \ A}, i = 1, 2, \cdots, , n$$

~~不太能解释~~