数学分析完整笔记

数学分析完整笔记

第一章 序章

- 暂无

第二章 函数

- 反函数

三角函数和反函数

倒数关系：

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

$$\sin\theta \cdot \csc\theta = 1$$

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

商数关系：

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

平方关系：

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

积化和差公式：

$$sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\ \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\ \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}[\ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

和差化积：

1. **正弦函数的和差化积公式：**

$$sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

2. **余弦函数的和差化积公式：**

$$cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

三角函数

- **余切函数**： 定义：

  $$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

  在直角三角形中

  $$\cot\theta=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$$

  值域：R，定义域：$\theta\neq k\pi,k\in Z$
- **正割函数**： 定义：

  $$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

  值域：$(-\infty,1]\cup[1,\infty)$，定义域：$\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$。
- **余割函数**： 定义：

  $$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

  值域：$(-\infty,1]\cup[1,\infty)$，定义域：$\theta\neq k\pi,k\in Z$。

反三角函数

1. **反正弦函数**： 符号：

   $$y=\arcsin x$$

   定义域：$[-1,1]$，值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 性质：

   $$\sin(\arcsin x)=x,x\in[1,1]$$

$$\arcsin(\sin y)=y, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

2. **反余弦函数**：符号：

$$y=\arccos x$$

定义域：$[-1,1]$，值域：$[0,\pi]$ 性质：

$$\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1]$$

$$\arccos(\cos y)=y, y\in[0,\pi]$$

3. **反正切函数**：符号：

$$y=\arctan x$$

定义域：R，值域：$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 性质：

$$\tan(\arctan x)=x, x\in R$$

$$\arctan(\tan y)=y, y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

4. **反余切函数**：符号：

$$y=\mathrm{arccot} x$$

定义域：R，值域：$(0,\pi)$ 性质：

$$\cot(\mathrm{arccot} x)=x, x\in R$$

$$\mathrm{arccot}(\cot y)=y, y\in(0,\pi)$$

第三章 极限

数列的极限

数列极限的$\varepsilon-N$语言证明

1. **定义** 数列$\{a_n\}$极限是A（记为$\lim_{n\to\infty}a_n=A$）的$\varepsilon-N$定义：对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$成立。
2. **证明步骤**
   - **步骤一：给定**$\varepsilon>0$
   - **步骤二：寻找**N
     - 通过分析$|a_n-A|<\varepsilon$，对a_n表达式变形来确定与ε有关的正整数N。
     - 例如，对于数列$a_n=\dfrac{1}{n}$证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由$|a_n-0|=|\dfrac{1}{n}-0|=\dfrac{1}{n}$，要使$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，得$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，可取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数）。
   - **步骤三：验证**$n>N$**时**$|a_n-A|<\varepsilon$**成立**

- 仍以上例说明，当$n > N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$时，$n > \frac{1}{\varepsilon}$，则$\frac{1}{n} < \varepsilon$，即$|a_n - 0| < \varepsilon$，证得$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

利用夹迫性证明数列极限

1. **夹迫性定理** 若存在三个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，满足当n足够大（比如$n > N_0$，N_0为某个正整数）时，$a_n \leq b_n \leq c_n$，且$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$，那么$\lim_{n\to\infty} b_n = A$。

函数的极限

1. **当$x \to 0$时**
   - **x与$\sin x$是等价无穷小：**
     - 根据等价无穷小的定义，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

   - **x与$\tan x$是等价无穷小：**
     - 同样有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

   - **$1 - \cos x$与$\frac{1}{2}x^2$是高阶等价无穷小：**
     - 由

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

- 补充：
- $$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$$

1. **当$x \to +\infty$时**
   - **$\ln x$与$\sqrt{x}$的关系：**
     - 对于任意正整数n，

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

   - **x^n与e^x（n为常数）：**
     - 对于任意常数n，

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

- 当$x \to 0$时

$$\arctan x \to \sin x \to x \to \arcsin x \to \tan x \quad \text{他们相差} \ \frac{x^3}{6}$$

重点：！！！！！（如果考试要用的话就要用泰勒展开写出来）

函数连续性

暂无

无限小量和无限大量

暂无

第四章 微分和微商

各种函数的导数

1. $(kx)' = k$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$

以下是重点

9. $(\tan x)' = \sec^2 x$

10. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

11. $(\sec x)' = \sec x \tan x$

12. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16. $(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

1. **双曲正弦函数（sinh x）**
   - 定义：$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
   - 导数：$(\sinh x)' = \cosh x$
2. **双曲余弦函数（cosh x）**
   - 定义：$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
   - 导数：$(\cosh x)' = \sinh x$

莱布尼兹公式

公式表述

若函数$u(x)$和$v(x)$都有n阶导数，则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

其中：

- $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$是二项式系数
- $u^{(n-k)}$表示u的$(n-k)$阶导数，当$n-k=0$时，$u^{(0)} = u$
- $v^{(k)}$表示v的k阶导数，当$k=0$时，$v^{(0)} = v$

> **应用举例** 求$y = x^2 e^x$的n阶导数。 令$u = x^2$，$v = e^x$ $u' = 2x$，$u'' = 2$，$u^{(k)} = 0$ for $k > 2$ $v^{(k)} = e^x$ for all $k \geqslant 0$ 根据莱布尼兹公式$(x^2 e^x)^{(n)} = C_n^0 x^2 e^x + C_n^1 (2x) e^x + C_n^2 (2) e^x$ 即 $(x^2 e^x)^{(n)} = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x$

第五章 中值定理

拉格朗日中值定理

定理内容

- 若函数$y = f(x)$满足：
  - 在闭区间$[a, b]$上连续；
  - 在开区间(a, b)内可导。
- 那么在(a, b)内至少存在一点ξ，使得
- $$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

> **应用举例** 例如，证明不等式$\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$，其中$a < b$。 设$f(x) = \arctan x$，$f(x)$在$[a, b]$上连续，在$(a, b)$内可导，且$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$。 根据拉格朗日

> 中值定理，存在$\xi \in (a,b)$，使得$\arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a)$。 因为 $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$ 所以$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$。

洛必达

没什么好说的

函数的极限

1. **函数极限存在的第一充分条件**
   - **内容**：设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域$\dot{U}(x_0,\delta)$内有定义。
     - 若当$x \in (x_0-\delta, x_0)$时，$f(x)$单调递增且有上界，当$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f(x)$单调递减且有下界，则$\lim_{x \to x_0} f(x)$存在。
     - 反之，若当$x \in (x_0-\delta, x_0)$时，$f(x)$单调递减且有下界，当$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f(x)$单调递增且有上界，则$\lim_{x \to x_0} f(x)$存在。
2. **函数极限存在的第二充分条件（重点看这个）**
   - **内容**：设函数$y=f(x)$在点x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0) \neq 0$。
     - 若$f''(x_0) > 0$，则函数$y=f(x)$在$x=x_0$处取得极小值；
     - 若$f''(x_0) < 0$，则函数$y=f(x$在$x=x_0$处取得极大值。

函数凹凸性

利用二阶导数判定 设函数$y=f(x)$在区间I内具有二阶导数。 如果$f''(x) > 0$，$x \in I$，那么函数$y=f(x)$在区间I上是凹的。 如果$f''(x) < 0$，$x \in I$，那么函数$y=f(x)$在区间I上是凸的。

定义5.2 设$f(x)$在(a,b)有定义。若对任意x_1，$x_2 \in (a,b)$和任意$\lambda \in (0,1)$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称$f(x)$在(a,b)为下凸函数；若对任意x_1，$x_2 \in (a,b)$和任意$\lambda \in (0,1)$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称$f(x)$在(a,b)为上凸函数。

函数拐点

判定方法

- **二阶导数法**
  - 一般地，若函数$y=f(x)$在点x_0处二阶可导，且在x_0的某邻域内二阶导数$f''(x)$变号（即函数的凹凸性发生改变），同时$f''(x_0)=0$，那么点$(x_0, f(x_0))$是函数$y=f(x)$的一个拐点。

> **二阶导数不存在的点也可能是拐点**

第六章&第七章&第八章 积分

- 常见积分公式

不定积分基本公式

$$\int kdx = kx + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln |\frac{x-a}{x+a}| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$$

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + c$$

补充

$$\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = x - \arctan x + C$$

过程如下（懂了吧）

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1+x^2} &= \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

换元积分

1. **第一类换元法（凑微分法）**
   - **示例**：计算$\int 2x \cos(x^2) dx$。
     - 令$u = x^2$，则$du = 2x dx$。
     - 原积分$\int 2x \cos(x^2) dx = \int \cos u du = \sin u + C$。
     - 再把$u = x^2$代回，得到$\sin(x^2) + C$。
   - **常见的凑微分形式**：

- $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)(a \neq 0)$
- $\int f(x^n)x^{n-1}dx = \frac{1}{n}\int f(x^n)d(x^n)$。
- $\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x)d(\sin x)$。

2. **第二类换元法**
   - **根式代换**
     - 当被积函数中含有$\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$时，可令$x = a\sin t$，$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$。
       - 示例：计算$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$。
         - 令$x = \sin t$，$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，则$dx = \cos t dt$。
         - 原积分
         - $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt = \int 1 dt = t + C$$
         - 因为$x = \sin t$，所以$t = \arcsin x$，最终结果为$\arcsin x + C$
     - 当被积函数中含有$\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$时，可令$x = a\tan t$，$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$。
     - 当被积函数中含有$\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$时，可令$x = a\sec t$，$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$。
   - **倒代换**
     - 当分母的次数比分子的次数高很多时，可考虑倒代换，即令$x = \frac{1}{t}$。
     - 示例：计算$\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}dx$。
       - 令$x = \frac{1}{t}$，则$dx = -\frac{1}{t^2}dt$。
       - 原积分

$$\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

       - 进一步化简

$$= -\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = -t + \arctan t + C$$

       - 再把$t = \frac{1}{x}$代回，得到$-\frac{1}{x} + \arctan\frac{1}{x} + C$。

3. **三角代换与双曲代换（补充方法）**
   - **三角代换**：三角代换主要是利用三角函数之间的关系 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$，$\sec^2 t - \tan^2 t = 1$等来化简根式。
   - **双曲代换(暂时没遇过)**：
     - 双曲函数定义为$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$，$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$，且$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$。

- 当被积函数含有$\sqrt{x^2+a^2}$时，也可令$x=a\sinh t$，因为$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\sinh^2 t+a^2}=a\cosh t$，这样代换后可以简化积分运算。

分部积分法

分部积分公式

- 设函数$u=u(x)$及$v=v(x)$具有连续导数，那么

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx$$

  也可以写成

$$\int udv=uv-\int vdu$$

有理函数的积分

就是拆开

定积分

暂无

积分中值定理

积分第一中值定理

- 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

> 这个定理的几何意义是：对于在区间$[a,b]$上连续的函数$y=f(x)$，由曲线$y=f(x)$、$x=a$、$x=b$以及x轴所围成的曲边梯形的面积等于以区间$[a,b]$为底，以这个区间内某一点ξ处的函数值$f(\xi)$为高的矩形的面积。

积分第二中值定理

- 第一形式：设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上单调递减且$g(x)\geq 0$，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

- 第二形式：设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上单调，那么存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

泰勒公式

带佩亚诺余项

若函数$f(x)$在点x_0存在直至n阶导数，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

其中$o((x-x_0)^n)$为佩亚诺余项，表示当$x \to x_0$时，余项是比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小.

带拉格朗日余项

若函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有$n+1$阶导数，则对于$\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$是介于$x_0$与$x$之间的某个值.

常见泰勒公式

指数函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

对数函数

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

三角函数

- **正弦函数**：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

- **余弦函数**：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

- **正切函数**：

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

反三角函数

- **反正弦函数**：

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$$

- **反正切函数**：

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots$$

双曲函数

- **双曲正弦函数**：

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots$$

- **双曲余弦函数**：

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

幂函数

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

自己推到:

麦克劳林展开式为：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

其中$r_n(x)$为余项

体积

暂无

弧长

（1）直角坐标形式

若曲线的方程为$y = f(x)$，$a \leq x \leq b$，且$f(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则曲线弧长s的计算公式为：

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

（2）参数方程形式

若曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$给出，$\alpha \leq t \leq \beta$，其中$x(t)$、$y(t)$在区间$[\alpha, \beta]$上具有连续导数，则曲线弧长$s$的计算公式为：

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

（3）极坐标形式

若曲线的极坐标方程为$\rho = \rho(\theta)$，$\alpha \leq \theta \leq \beta$，且$\rho(\theta)$在区间$[\alpha, \beta]$上具有连续导数，则曲线弧长$s$的计算公式为：

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2} d\theta$$

曲率

直角坐标系的曲率

$$\left| \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \right|$$

参数方程的曲率

- 若曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$给出，$t$为参数。则$x' = x'(t)$，$y' = y'(t)$，$x'' = x''(t)$，$y'' = y''(t)$。
- 曲率公式为

$$\left| \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \right|$$

面积

1. **直角坐标下求面积**
   - 设函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上连续且$f(x) \geqslant 0$，那么由曲线$y = f(x)$，直线$x = a$，$x = b$以及x轴所围成的曲边梯形的面积

$$\int_a^b f(x) dx$$

2. **极坐标下求面积**
   - 由极坐标方程$\rho = \rho(\theta)$，$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$所围成的图形的面积

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

3. **参数方程下求面积**
   - 若曲线C的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$，且$x(t)$，$y(t)$具有连续的一阶导数，$x'(t)$不变号。
   - 当$x'(t) > 0$时，曲线C与直线$x = a, x = b, y = 0$所围成的图形的面积

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$$

直角坐标与极坐标的转换关系

- 直角坐标用(x, y)表示，极坐标用(ρ, θ)表示，它们之间的转换公式为$x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$，且$\rho^2 = x^2 + y^2$

一些例题

- 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(1 + 1/i)}{\sin 1/i}$$

- 解答：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(1 + 1/i)}{\sin 1/i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{\sin 1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sin x} = 1$$

黎曼和

当分割子区间的最大长度$\lambda \to 0$（$n \to +\infty$且分割越来越细）时，黎曼和的极限若存在，就是函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

第十章 数项级数

一、正项级数敛散性判别法

（一）比较判别法

1. **原理**：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$是两个正项级数，且$a_n \le b_n (n = 1, 2, \cdots)$。若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

2. **例如**：判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$的敛散性。因为$\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛的$p$级数（$p=2>1$），所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛。

（二）比较判别法的极限形式

1. **原理**：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$是两个正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$（ $ 0 < l <+\infty）， 则 \displaystyle\sum{n = 1}^{\infty}a{n}与\displaystyle\sum{n = 1}^{\infty}b{n}$敛散性相同。
2. **例如**：判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$的敛散性。因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$发散。

（三）比值判别法（达朗贝尔判别法）

1. **原理**：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$。当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$\rho>1$（包括$\rho=+\infty$）时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；当$\rho=1$时，判别法失效。
2. **例如**：判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$的敛散性。计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$$，所以级数收敛。

（四）根值判别法（柯西判别法）

1. **原理**：设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$。当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$\rho>1$（包括$\rho=+\infty$）时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；当$\rho=1$时，判别法失效。
2. **例如**：判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$的敛散性。$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，所以该级数收敛。

（五）积分判别法

1. **原理**：设$f(x)$是$[1,+\infty)$上非负、单调递减的连续函数，令$a_n=f(n)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$同敛散。
2. **例如**：判断$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$的敛散性。考虑函数$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to+\infty}[\ln(\ln x)]_2^t=+\infty$$，所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散。

（六）拉阿比判别法

1. **原理**：设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是正项级数，且$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=R$。
   - 当$R>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；
   - 当$R<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；
   - 当$R=1$时，判别法失效。
2. **例如**：判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^n}$的敛散性。计算$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$：

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^n} \\
a_{n+1} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}} \\
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot 2^{n+1} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot 2 \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+1)^2\cdot(n!)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\cdot 2 \\
&= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)}\cdot 2 \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(2n+1)}\cdot 2 \\
&= \frac{n+1}{2n+1}\cdot 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{2n+1}\cdot 2-1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2-(2n+1)}{2n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2}<1
\end{aligned}
$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^n}$发散。

二、交错级数敛散性判别法

（一）莱布尼茨判别法

1. **原理**：对于交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$，如果$a_n \geq a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，且$\lim_{n\to\infty} a_n=0$，那么交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛。
2. **例如**：判断$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的敛散性。$a_n=\frac{1}{n}$，显然$\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，所以该交错级数收敛。

三、任意项级数敛散性判别法

（一）绝对收敛判别法

1. **原理**：若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。
2. **例如**：判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$的敛散性。因为$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$绝对收敛，从而该级数收敛。

（二）条件收敛判别法

如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛。例如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$条件收敛。

第十一章到第十三章

狄利克雷判别法：

一、数项级数的狄利克雷判别法

设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$，如果满足：

1. 部分和序列$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$有界，即存在常数M，使得对所有n，都有：

$$|A_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leq M$$

2. 数列$\{b_n\}$单调趋于零，即：
   - 单调递减或单调递增；$\lim_{n\to\infty}b_n=0$。

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

二、函数项级数的狄利克雷判别法

设函数项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

如果满足：

1. 对每个固定的x，部分和序列

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

有界，即存在常数$M(x)$，使得：

$$|A_n(x)| \leq M(x)$$

2. 函数序列$\{b_n(x)\}$对n单调趋于零，即满足：
   - 单调性：对于每个固定的x，$b_n(x)$关于n单调递减或递增；
   - 极限性：对每个固定的x，有$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = 0$。

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$收敛。

三、广义积分的狄利克雷判别法

设积分：

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

如果满足：

1. 积分的原函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

有界，即存在常数M，使得：

$$|F(x)| \leq M, \quad x \geq a$$

2. 函数$g(x)$满足：
   - 在区间$[a, +\infty)$上单调趋于零；$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$。

则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$收敛。

四、瑕积分的狄利克雷判别法

设积分存在瑕点$x = a$（假设瑕点为积分下限，其他点类似），考虑积分：

$$\int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

如果满足：

1. 积分的原函数：

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在靠近瑕点$x=a$时有界。

2. 函数$g(x)$满足：
   - 在$(a,b]$上单调趋于零（当$x\to a^+$时）； -$\lim_{x\to a^+} g(x)=0$。

则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$收敛。

阿贝尔判别法：

一、数项级数的阿贝尔判别法

考虑级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

如果满足以下两个条件：

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**（而非仅仅有界）；
2. 数列$\{b_n\}$为**单调有界数列**，即：
   - 存在有限的常数M，使得$|b_n|\le M$，且单调（递增或递减）。

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$**收敛**。

二、函数项级数的阿贝尔判别法

判别法描述：

考虑函数项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

如果满足：

1. 对每个固定的x，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

收敛；

2. 对每个固定的x，函数序列$\{b_n(x)\}$单调有界，即：
   - 存在常数$M(x)$，使得对所有n，$|b_n(x)|\le M(x)$；

- 对于固定的x，关于n单调递增或递减。

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$收敛。

三、广义积分的阿贝尔判别法

判别法描述：

考虑广义积分：

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

如果满足：

1. 积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$**收敛**；
2. 函数$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上**单调有界**，即：
    - 存在常数M，使得$|g(x)| \le M$，且$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调。

则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$**收敛**。

四、瑕积分的阿贝尔判别法

判别法描述：

考虑具有瑕点的积分（例如积分下限有瑕点a）：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

如果满足：

1. 瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$**收敛**；
2. 函数$g(x)$在$(a,b]$上**单调有界**，即：
    - 存在常数M，使得对所有$x \in (a,b]$，有$|g(x)| \le M$；
    - 在区间靠近瑕点a时，函数$g(x)$是单调的。

则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$**收敛**。

总结成一句话：

- **狄利克雷** 判别法：部分和有界 (震荡) × 单调趋零 = 收敛。
- **阿贝尔** 判别法：已知收敛 (收敛×单调有界) = 收敛。

第十四章 傅里叶级数

一、傅里叶级数的基本概念与公式

一个定义在区间$[-l,l]$上周期为$2l$的函数$f(x)$，可表示成傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right]$$

系数计算公式：

- **常数项**a_0：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$$

- **余弦项系数**a_n（$n\geq 1$）：

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

- **正弦项系数**b_n（$n\geq 1$）：

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

二、傅里叶级数的特殊区间（常见）：

（一）区间$[-\pi,\pi]$（标准区间）

若函数定义在$[-\pi,\pi]$，周期为2π，傅里叶级数为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

- 系数公式：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

（二）区间$[0,2\pi]$

若函数定义在区间$[0,2\pi]$，周期为2π，傅里叶级数展开为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

- 系数计算：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

（三）区间$[-l,l]$（一般区间）

一般区间的情况（区间长度为$2l$），傅里叶级数通式为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

- 系数计算：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

三、小结（核心公式记忆）：

- 通式记忆：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

- 一般系数公式：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

- 区间特化记忆：
  - 标准区间$[-\pi,\pi]$时，公式中$l=\pi$；
  - 区间$[0,2\pi]$时，积分区间改为$[0,2\pi]$。

第十五章——第二十章

一、二元函数的极限与连续性

1. 函数极限定义

假设函数$f(x,y)$定义在点(x_0,y_0)的去心领域内，若对任意路径$(x,y)\to(x_0,y_0)$，极限值均存在且相等，则记为极限：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=L$$

2. 二元函数极限存在判定

- 当沿不同路径趋于同一点的极限值不同时，则该二元函数极限不存在。

常用方法：

- 沿特殊路径（如$x=x_0$,$y=y_0$,$y=k(x-x_0)$等）求极限并比较。
- 极坐标法：将(x,y)替换为$(r\cos\theta,r\sin\theta)$，考察当$r\to 0$时的极限。

3. 二元函数的连续性

若二元函数满足：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称函数在点(x_0, y_0)连续。

连续函数的性质：

- 基本运算法则（加、减、乘、除、复合运算）在连续点均保持连续。
- 多项式函数、指数函数、三角函数在定义域内连续。

二、二元函数的偏导数与高阶偏导

1. 偏导数定义

给定二元函数$z = f(x, y)$，偏导数表示函数沿坐标轴方向的变化率：

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

2. 高阶偏导

常见的二阶偏导：

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

偏导连续、光滑函数具有性质：

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

（克莱罗定理）

三、二元函数的可微性与全微分

1. 二元函数的可微定义

设二元函数$z = f(x, y)$，若其变化量可表示为线性主部与高阶无穷小之和：

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\rho), \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

且满足：

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$$

则称函数在该点可微。其中：

-$f_x(x,y), f_y(x,y)$为函数在(x,y)点的偏导数。 -$o(\rho)$为高阶无穷小量，其在点邻域内趋于零的速度快于线性小量ρ。

几何意义： 可微函数在该点局部表现如同一个线性函数，且误差项相对于线性近似部分极小，保证函数在该点附近可用线性函数很好地逼近。

2. 全微分形式

若函数在点(x, y)可微，则全微分为：

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

作为函数在该点的线性近似。

3. 可微性与连续性、偏导关系：

函数可微 ⇒ 函数必定连续，且偏导数存在。但偏导数存在不能保证函数一定可微。充分条件（常见判定定理）：

- 若函数两个偏导数在点附近连续，则该函数在该点一定可微。

四、二元函数的极值与最小二乘法

1. 极值

若点(x_0, y_0)为极值点（可能极大或极小），则有：

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

二阶导数判别法

定义 Hessian 判别式：

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

- 若$H > 0, f_{xx}(x_0, y_0) > 0$，点为极小；
- 若$H > 0, f_{xx}(x_0, y_0) < 0$，点为极大；
- 若$H < 0$，则为鞍点，不为极值点。

2. 最小二乘法（Least Squares Method）

拟合数据曲线，用以确定线性模型参数：

对于拟合函数$y = ax + b$，最小化平方误差之和：

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

通过偏导求驻点建立法方程：

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

由此解出最优参数a, b。

五、条件极值与拉格朗日乘数法

求函数$f(x, y)$在约束条件$g(x, y) = 0$下的极值。

构建拉格朗日函数：

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

其中$g(x, y) = h(x, y) - c$为约束函数。

由方程组：

$$\nabla L = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

求解确定极值点。

六、含参变量的积分、广义积分与欧拉积分

1. 含参变量积分

积分形式：

$$F(a) = \int_{u(a)}^{v(a)} f(x, a)\, dx$$

求导法则（Leibniz公式）：

$$F'(a) = f[v(a), a] \cdot v'(a) - f[u(a), a] \cdot u'(a) + \int_{u(a)}^{v(a)} \frac{\partial f}{\partial a}(x, a)\, dx$$

2. 广义积分

例如：

$$\int_0^{+\infty} f(x, a)\, dx$$

判断广义积分收敛的常用方法：

- 比较判别法
- 极限判别法

3. 欧拉积分

- 第一类欧拉积分（Beta函数）：

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\quad x>0,y>0$$

- 第二类欧拉积分（Gamma函数）：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,\quad x>0$$

- 两者关系：

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

七、重积分

二重积分定义

设区域D为闭区域，则二重积分表示为：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

计算方法

- 直角坐标系下的积分：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

- 极坐标变换：

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad dxdy=r\,drd\theta$$

应用

- 求面积、体积、质量、重心等
- 交换积分次序 (Fubini定理)：

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dydx=\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dxdy$$